OSN Matematika SMA 2016
Hari Pertama

1. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$ dengan kedua diagonalnya saling tegak lurus dan berpotongan di titik O. Garis tegak lurus dari O pada AB, memotong AB di E. Garis tegak lurus dari O pada BC, memotong BC di F. Garis tegak lurus dari O pada CD, memotong CD di G. Garis tegak lurus O pada DA, memotong DA di H.

   (a) Buktikan bahwa $\angle EFG + \angle GHE = 180^\circ$.

   (b) Buktikan bahwa OE merupakan garis bagi sudut FEH.

2. Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) dengan $b > 1$ yang memenuhi

$$2^c + 2^{2016} = a^b.$$

3. Terdapat 5 kotak yang disusun secara melingkar. Pada mulanya, terdapat satu kotak yang berisi satu bola, sementara kotak lainnya kosong. Pada setiap langkah, kita dapat melakukan salah satu dari dua operasi berikut:

   (i) pilih satu kotak yang tak kosong, hilangkan satu bola dari kotak tersebut dan tambahkan masing-masing satu bola ke kedua kotak yang bersebelahan dengan kotak tersebut,

   (ii) . pilih satu kotak kosong yang bersebelahan dengan kotak yang tidak kosong, dari kotak yang tidak kosong tersebut pindahkan satu bola ke kotak yang kosong tadi.

   Apakah mungkin, bahwa setelah beberapa langkah, diperoleh kondisi dimana setiap kotak berisi tepat $17^{5^{2016}}$ bola?

4. Misalkan dalam segitiga ABC berlaku bahwa

$$\frac{\cos A}{20} + \frac{\cos B}{21} + \frac{\cos C}{29} = \frac{29}{420}.$$

   Buktikan bahwa segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku.

OSN Matematika SMA 2016
Hari Kedua

5. Diberikan bilangan real x. Definisikan barisan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dengan $a_n = \lfloor nx \rfloor$ untuk setiap bilangan asli n. Jika barisan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan aritmatika, haruskah x bilangan bulat?

6. Diberikan segiempat $ABCD$ yang kedua diagonalnya tidak saling tegak lurus. Suatu persegi dikatakan fantastik jika masing-masing garis sisi persegi tersebut memuat tepat satu titik yang berbeda diantara A, B, C, D. Buktikan bahwa sebarang segiempat $ABCD$ memiliki paling sedikit 6 persegi fantastik

7. Misalkan $p > 2$ suatu bilangan prima. Untuk setiap bilangan bulat $k = 1, 2, \ldots, p-1$ definisikan r_k sebagai sisa pembagian k^p oleh p^2. Buktikan bahwa

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_{p-1} = \frac{p^2(p-1)}{2}$$

8. Tentukan banyaknya permutasi $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ dari $1, 2, 3 \ldots, 2016$ sehingga

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = |a_3 - 3| = \ldots = |a_{2016} - 2016| = M$$

untuk suatu bilangan asli M yang habis dibagi 3.