

OSN Matematika SMA 2017
Hari Pertama

1. Melalui titik sudut A dari jajargenjang $ABCD$, dibuat suatu garis g . Buktikan bahwa jarak dari C ke garis g adalah jumlah atau selisih jarak dari B dan D ke g .
2. Lima orang siswa bertemu di sebuah tempat. Sebuah trio adalah pasangan tiga siswa (A, B, C) sehingga A berjabat tangan dengan B dan B berjabat tangan dengan C atau A tidak berjabat tangan dengan B dan B tidak berjabat tangan dengan C . Jika trio (A, B, C) dan (C, B, A) dianggap sebagai trio yang sama, berapa paling sedikit banyaknya trio yang mungkin?
3. Suatu bilangan asli d disebut istimewa jika setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai $a^2 + b^2 - dc^2$ untuk suatu bilangan bulat a, b, c .
 - (a) Tentukan bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.
 - (b) Tunjukkan bahwa 2017 bilangan istimewa.
4. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}x^{100} - y^{100} &= 2^{99}(x - y) \\ x^{200} - y^{200} &= 2^{199}(x - y)\end{aligned}$$

dengan x dan y berbeda.

OSN Matematika SMA 2017 Hari Kedua

5. Diberikan polinom P dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Misalkan diketahui bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 99 solusi bilangan bulat berbeda. Misalkan juga n adalah sebarang bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$. Buktikan bahwa $P(n) = 0$.
6. Tentukan banyaknya bilangan asli n yang tidak lebih besar dari 2017 sedemikian sehingga n habis membagi $20^n + 17k$ untuk suatu bilangan asli k .
7. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Titik E dan titik F dipilih berturut-turut pada sisi BC dan CD sedemikian rupa sehingga segitiga ABE dan segitiga BCF mempunyai luas yang sama. Diagonal BD memotong AE dan AF berturut-turut di M dan N . Buktikan terdapat segitiga yang panjang sisi-sisinya sama dengan BM, MN dan ND .
8. Lantai dari sebuah aula ditutupi dengan 2017×2017 ubin satuan. Luffy mempunyai sejumlah detektor. Setiap detektor yang diletakkan di atas ubin akan menyala jika tepat dibawahnya terdapat emas, dan tidak bereaksi apapun jika tidak ada emas di bawahnya. Luffy meletakkan k buah detektor tepat di atas k buah ubin kemudian dia keluar ruangan. Kemudian Sanji memilih suatu daerah persegi yang ditutupi oleh 1500×1500 ubin satuan dan menyembunyikan tepat satu koin emas di bawah setiap ubin. Ketika Luffy kembali dan melihat detektor yang tadi dia pasang, dia dapat menentukan letak semua koin yang tadi di tanam Sanji. Tentukan nilai k terkecil agar Luffy selalu dapat menentukan letak semua koin tak peduli daerah manapun yang dipilih Sanji.