OSN Matematika SMA 2019
Hari Pertama

1. Diberikan bilangan asli n dan r. Diketahui

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+r)$$

   Buktikan bahwa n adalah bilangan komposit.

2. Diberikan 19 kotak merah dan 200 kotak biru yang akan diisi bola. Tidak ada kotak yang kosong. Diketahui bahwa setiap kotak merah memuat paling banyak 200 bola dan setiap kotak biru memuat paling banyak 19 bola. Diketahui bahwa jumlah banyak bola di setiap kotak merah lebih kecil dibanding jumlah banyak bola di setiap kotak biru. Buktikan bahwa terdapat himpunan bagian dari kotak-kotak merah dan himpunan bagian dari kotak-kotak biru sedemikian hingga jumlah banyak bola pada keduanya sama.

3. Diberikan persegi panjang $ABCD$ dengan $AD > AB$. Titik E terletak pada AD sedemikian hingga BE tegak lurus AC. Titik M merupakan perpotongan AC dan BE. Lingkaran luar $\triangle ABE$ memotong AC dan BC di titik N dan F. Misalkan lingkaran luar $\triangle DNE$ memotong CD di G. Misalkan pula FG memotong AB di P. Buktikan bahwa $PM = PN$.

4. Definisikan *ekuivalensi segitiga* sebagai susunan angka-angka seperti berikut

$$\begin{gathered} a + b = c \\ d + e + f = g + h \\ i + j + k + l = m + n + o \\ \vdots \end{gathered}$$

   di mana baris ke-j memuat $j+1$ di ruas kiri dan j angka di ruas kanan.

   Selanjutnya, diberikan N^2 bilangan asli pertama. Satu angka dari bilangan-bilangan tersebut akan dihilangkan. Buktikan bahwa $N^2 - 1$ angka yang tersisa dapat membentuk *ekuivalensi segitiga*.

OSN Matematika SMA 2019
Hari Kedua

5. Diberikan bilangan real a dan b sedemikian hingga terdapat tak hingga bilangan asli m dan n yang memenuhi

$$\lfloor an + b \rfloor \geq \lfloor a + bn \rfloor$$
$$\lfloor a + bm \rfloor \geq \lfloor am + b \rfloor$$

Buktikan bahwa $a = b$.

6. Diberikan lingkaran dengan pusat O dan titik A yang tidak terletak pada lingkaran tersebut. Misalkan B adalah pencerminan titik A terhadap O. Misalkan P adalah sebarang titik pada lingkaran. Garis tegak lurus AP yang melalui P memotong lingkaran di titik Q. Buktikan bahwa $AP \times BQ$ bernilai konstan untuk setiap P.

7. Tentukan semua solusi persamaan

$$x + y^2 = p^m$$
$$x^2 + y = p^n$$

dimana x, y, m dan n merupakan bilangan asli sedangkan p merupakan bilangan prima.

8. Misalkan $n > 1$ adalah bilangan asli dan $a_1, a_2, \ldots, a_{2n} \in \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$. Misalkan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} = n + 1$$

Buktikan bahwa dapat diambil beberapa angka dari $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ yang jumlahnya sama dengan 0.