OSN Matematika SMA 2020
Hari Pertama

1. Diberikan segitiga lancip ABC dan titik D yang terletak pada segmen BC. Lingkaran C_1 merupakan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis AC dan melalui titik A dan D, sedangkan lingkaran C_2 merupakan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis AB dan melalui titik A dan D. Titik $P \neq A$ merupakan perpotongan lingkaran C_1 dengan garis AB dan titik $Q \neq A$ merupakan perpotongan lingkaran C_2 dengan garis AC. Buktikan bahwa AD membagi dua sudut $\angle PDQ$.

2. Diberikan bilangan real a, b, c dan polinomial $P(x) = ax^2 + bx + c$. Jika

$$P(a) = bc, P(b) = ac, P(c) = ab,$$

buktikan bahwa $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) = 0$.

3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n^2 + f(n)f(m)$ merupakan kelipatan $f(n) + m$ untuk setiap bilangan asli m, n.

4. Papan catur berukuran $2n \times 2n$ akan diwarnai sedemikian hingga setiap petak diwarnai menggunakan salah satu dari n warna yang tersedia. Buktikan bahwa terdapat 2 petak yang berada pada kolom atau baris yang sama sedemikian hingga jika warna kedua petak tersebut ditukar, terdapat persegi panjang yang keempat titik sudutnya memiliki warna yang sama.

OSN Matematika SMA 2020
Hari Kedua

5. Sebuah himpunan A memuat n bilangan bulat, di mana setiap bilangan lebih dari 1 dan faktor prima bilangan tersebut kurang dari 10. Tentukan nilai terkecil n sedemikian hingga selalu terdapat dua anggota berbeda A, a dan b di mana ab merupakan kuadrat sempurna.

6. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan X merupakan titik yang terletak pada segmen BC sedemikian hingga AX tegak lurus dengan garis bagi $\angle CBD$ dan Y merupakan titik yang terletak pada segmen AD sedemikian hingga BY tegak lurus garis bagi $\angle CAD$. Buktikan bahwa XY sejajar CD.

7. Tentukan semua polinomial $P(x)$ dengan koefisien bilangan real sedemikian hingga

$$P\left(\lfloor x \rfloor\right) = \lfloor P(x) \rfloor$$

untuk setiap bilangan real x.

8. Tentukan bilangan asli terkecil $n > 2$, atau buktikan bahwa tidak terdapat bilangan asli n yang memenuhi kondisi berikut:

Terdapat bilangan asli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sedemikian hingga

$$\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{1}{FBP(a_k, a_{k+1})} + \frac{1}{FBP(a_k, a_{k+2})} + \ldots + \frac{1}{FBP(a_k, a_n)} \right)}_{n-k \text{ suku}}$$