

OSN Matematika SMA 2021 Hari Pertama

1. Pada papan tertulis secara berurutan angka-angka berikut

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Andi harus menempatkan tanda $+$ atau $-$ di antara setiap dua angka yang berurutan dan menghitung nilai dari ekspresi yang dihasilkan. Sebagai contoh, Andi bisa menempatkan tanda $+$ dan $-$ sebagai berikut

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 5$$

Tentukan bilangan positif ganjil terkecil yang tidak mungkin bisa diperoleh oleh Andi.

2. Diberikan $\triangle ABC$ lancip. Titik D dan E berturut-turut merupakan titik tengah segmen AB dan AC . Misalkan L_1, L_2 berturut-turut merupakan lingkaran luar $\triangle ABC$ dan $\triangle ADE$. Garis CD memotong lingkaran L_1 dan L_2 berturut-turut pada titik M yang berbeda dengan C dan pada titik N yang berbeda dengan D . Jika $DM = DN$, buktikan $\triangle ABC$ sama kaki.
3. Suatu bilangan asli disebut prima berpangkat jika bilangan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk p^k , dengan p prima dan k bilangan bulat positif. Tentukan nilai n terbesar yang mungkin sehingga ada barisan bilangan prima berpangkat a_1, a_2, \dots, a_n dengan $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ untuk setiap $3 \leq i \leq n$.
4. Diberikan bilangan real positif x, y, z yang memenuhi $x + y + z = 3$. Buktikan bahwa

$$2\sqrt{x + \sqrt{y}} + 2\sqrt{y + \sqrt{z}} + 2\sqrt{z + \sqrt{x}} \leq \sqrt{8 + x - y} + \sqrt{8 + y - z} + \sqrt{8 + z - x}.$$

OSN Matematika SMA 2021
Hari Kedua

5. Misalkan $P(x) = x^2 + rx + s$ polinom dengan koefisien real. Diketahui $P(x)$ mempunyai dua akar real berbeda yang kurang dari -1 dan selisih keduanya kurang dari 2 . Buktikan bahwa $P(P(x)) > 0$ untuk setiap bilangan real x .
6. Terdapat n bilangan asli pada sebuah papan tulis. Pada setiap langkah, kita dapat menghapus bilangan a dan b dan menggantinya dengan $FPB(a, b)$ dan $KPK(a, b) - FPB(a, b)$. Buktikan bahwa semua bilangan dapat dibuat sama dengan sebanyak berhingga langkah.
7. Diberikan $\triangle ABC$ dengan lingkaran luar γ . Titik M berada di dalam $\triangle ABC$ sedemikian hingga AM merupakan garis bagi sudut $\angle BAC$. Lingkaran dengan jari-jari MB dengan pusat M memotong γ dan BC berturut-turut di D dan E yang keduanya berbeda dengan B . Misalkan P titik tengah busur BC di γ yang tidak memuat A . Buktikan bahwa AP garis bagi $\angle DPE$ jika dan hanya jika $\angle B = 90^\circ$.
8. Di sebuah papan catur besar berukuran 100×100 , rencananya akan diletakkan papan-papan kecil berukuran 1×3 dan 3×1 , sehingga:
 - (i) Setiap petak papan catur tersebut tertutup oleh paling banyak satu papan kecil.
 - (ii) Keseluruhan papan kecil menutupi seluruh petak papan besar, kecuali satu.
 - (iii) Sisi-sisi papan kecil diletakkan sejajar dengan petak-petak papan besar.

Misalkan untuk melakukan instruksi di atas, dibutuhkan H buah papan berukuran 1×3 dan V buah papan berukuran 3×1 . Tentukan semua pasangan (H, V) yang mungkin.