

OSN Matematika SMA 2014 Hari Pertama

1. Bilangan-bilangan $1, 2, \dots, 9$ akan ditempatkan ke dalam papan catur berukuran 3×3 . Mungkinkah bilangan-bilangan ini ditempatkan sehingga setiap dua persegi yang bertetanga, baik secara vertikal ataupun horizontal, jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?
2. Misalkan m, n bilangan asli sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned}x + y^2 &= m \\x^2 + y &= n\end{aligned}$$

memiliki tepat satu solusi bulat (x, y) . Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F . Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL .
4. Tentukan semua polinom dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku, berlaku $P(a), P(b), P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.
Catatan: Jika c sisi miring, $P(c)$ tidak harus merupakan sisi miring.

OSN Matematika SMA 2014
Hari Kedua

5. Suatu barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, \dots memenuhi $a_k + a_l = a_m + a_n$ untuk setiap bilangan asli k, l, m , dan n dengan $kl = mn$. Jika m membagi n , buktikan bahwa $a_m \leq a_n$
6. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam $\angle BAC$. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada garis AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle ACB$. Jika P merupakan titik potong dari garis AD dan garis MN , buktikan bahwa

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

7. Misalkan k, l , dan n merupakan bilangan asli dengan $k \leq n$. Buktikan bahwa

$$\sum_{r=0}^m \frac{k \binom{m}{r} \binom{n}{k}}{(r+k) \binom{m+n}{r+k}} = 1$$

8. Suatu bilangan asli disebut cantik jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

untuk suatu bilangan asli x dan y yang berbeda.

- (a) Tunjukkan bahwa 2014 dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan cantik dan bilangan tidak cantik
- (b) Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan tidak cantik tetap tidak cantik