OSN Matematika SMA 2015
Hari Pertama

1. Albert, Bernard dan Cheryl sedang bermain kelereng. Di awal permainan masing-masing membawa 5 kelereng merah, 7 kelereng hijau dan 13 kelereng biru, sedangkan di kotak kelereng ada tak berhingga banyaknya kelereng. Pada satu langkah setiap anak diberi kebebasan membuang dua kelereng yang berbeda warna, kemudian menggantinya dengan dua kelereng dengan warna ketiga. Sebagai contoh, satu kelereng hijau dan satu kelereng merah dibuang, kemudian dua kelereng biru diambil dari kotak. Setelah serangkaian langkah (banyaknya langkah yang dilakukan masing-masing anak boleh berbeda) terjadilah percakapan berikut.

   - Albert : ”Saya hanya membawa kelereng berwarna merah”
   - Bernard : ”Saya hanya membawa kelereng berwarna biru”
   - Cheryl : ”Saya hanya membawa kelereng berwarna hijau”

   Siapa sajakah yang pasti berbohong?

2. Untuk setiap bilangan asli a, b notasikan dengan $[a, b]$ kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b dan notasikan dengan (a, b) faktor persekutuan terbesar dari a dan b. Tentukan semua bilangan asli n sehingga

$$4\sum_{k=1}^{n}[n,k] = 1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) + 2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

3. Diberikan segitiga lancip ABC. Lingkaran Γ_B adalah lingkaran yang melewati AB dan menyinggung AC pada A dan berpusat di O_B. Definisikan serupa untuk Γ_C dan O_C. Misalkan garis tinggi segitiga ABC dari B dan C memotong lingkaran luar segitiga ABC pada X dan Y. Buktikan A, titik tengah XY, dan titik tengah O_BO_C segaris.

4. Misalkan pasangan fungsi $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ memenuhi persamaan fungsi

$$f(g(x)y + f(x)) = (y + 2015)f(x)$$

   untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Buktikan bahwa $g(x) = \dfrac{f(x)}{2015}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$

   (b) Berikan contoh pasangan fungsi yang memenuhi persamaan diatas dan $f(x), g(x) \geq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$

OSN Matematika SMA 2015
Hari Kedua

5. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan asli sehingga $a \mid c^d$ dan $b \mid d^c$. Buktikan bahwa $(ab) \mid (cd)^{\max\{a,b\}}$

6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D. Misalkan P titik pada sisi BC, Garis melalui P tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di E dan F. Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q. Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$.

7. Misalkan a, b, c bilangan real positif. Buktikan ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}} \geq 3$$

8. Diketahui ada 3 gedung berbentuk sama yang lokasinya membentuk segitiga sama sisi. Masing-masing gedung memiliki 2015 lantai dengan setiap lantainya tepat memiliki 1 jendela. Pada ketiga gedung, setiap lantai 1 tidak berpenghuni, sedangkan masing-masing lantai yang lain mempunyai tepat satu penghuni.

   Semua jendela akan diwarnai dengan salah satu warna merah, hijau, atau biru. Sang penghuni masing-masing lantai pada suatu gedung dapat melihat warna jendela pada kedua gedung lain untuk lantai yang sama dan satu lantai tepat di bawahnya, tetapi dia tidak bisa melihat warna jendela-jendela yang lain pada kedua gedung tersebut. Selain itu, sang penghuni tidak dapat melihat warna jendela dari lantai manapun pada gedungnya sendiri. Sebagai contoh, penghuni lantai 10 dapat melihat warna jendela lantai 9 dan 10 untuk kedua gedung yang lain (total 4 jendela) dan dia tidak dapat melihat warna jendela lainnya.

   Kita ingin mewarnai jendela-jendela tersebut agar setiap penghuni dapat melihat paling sedikit 1 jendela dari setiap warna. Ada berapa cara mewarnai jendela-jendela tersebut?