

OSN Matematika SMA 2022
Hari Pertama

1. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x)$$

2. Diketahui $P(x)$ suku banyak dengan koefisien bilangan bulat yang memenuhi $P(1) = 10$ dan $P(-1) = 22$.
- (a) Berikan contoh $P(x)$ sehingga $P(x) = 0$ memiliki suatu akar bilangan bulat.
- (b) Jika $P(0) = 4$, tunjukkan bahwa $P(x) = 0$ tidak memiliki akar bilangan bulat
3. Diberikan persegi panjang $ABCD$. Titik E, F terletak pada diagonal AC sehingga F terletak di antara A, E dan E terletak di antara C, F . Lingkaran luar segitiga BEF memotong AB dan BC pada G, H dan lingkaran luar segitiga DEF memotong AD dan CD pada I, J . Buktikan bahwa garis GJ, IH , dan AC berpotongan di satu titik.
4. Diberikan segi-26 beraturan. Tunjukkan bahwa untuk sembarang 9 titik sudut dari segi-26 tersebut, pasti ada tiga titik yang membentuk segitiga sama kaki.

OSN Matematika SMA 2022
Hari Kedua

5. Diberikan bilangan asli $N \geq 2$ dan bilangan bulat a_1, a_2, \dots, a_{N+1} sehingga untuk setiap indeks $1 \leq i \leq j \leq N + 1$ berlaku

$$a_i a_{i+1} \dots a_j \not\equiv 1 \pmod{N}$$

Buktikan bahwa terdapat indeks i sehingga $\gcd(a_i, N) \neq 1$.

6. Pada segitiga ABC , titik D dan E berada pada sisi AB dan AC berturut-turut sehingga DE sejajar BC . Diketahui terdapat titik P pada interior segiempat $BDEC$ sehingga

$$\angle BPD = \angle CPE = 90^\circ$$

Buktikan bahwa garis AP melalui titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga EPD dan BPC .

7. Misalkan A adalah suatu barisan bilangan nol dan satu. Barisan tersebut dapat diubah dengan melakukan operasi berikut: kita boleh memilih suatu blok atau sub-barisan bersambung (contiguous subsequence) di mana terdapat nol dan satu yang tidak sama banyaknya, dan membalik urutan bilangan di dalam blok tersebut (blok a_1, a_2, \dots, a_r menjadi a_r, a_{r-1}, \dots, a_1).

Sebagai contoh, misalkan A adalah barisan $1, 1, 0, 0, 1$. Kita boleh memilih blok $1, 0, 0$ dan membalikannya, sehingga barisan $1, \boxed{1, 0, 0}, 1$ berubah menjadi $1, \boxed{0, 0, 1}, 1$. Namun, kita tidak boleh memilih blok $1, 1, 0, 0$ dan membalik urutannya karena mengandung 1 dan 0 yang sama banyaknya.

Dua barisan A dan B dikatakan berkerabat jika A dapat diubah menjadi B melalui sejumlah hingga operasi-operasi di atas.

Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga terdapat n barisan berbeda A_1, A_2, \dots, A_n di mana setiap barisan terdiri dari 2022 bilangan dan untuk setiap indeks $i \neq j$, barisan A_i tidak berkerabat A_j .

8. Tentukan bilangan real positif K terkecil sehingga ketaksamaan

$$K + \frac{a + b + c}{3} \geq (K + 1) \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

berlaku untuk setiap bilangan real $0 \leq a, b, c \leq 1$.