OSN Matematika SMA 2012
Hari Pertama

1. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli a dan b, bilangan

$$n = \text{KPK}(a, b) + \text{FPB}(a, b) - a - b$$

adalah bilangan bulat genap tak negatif.

2. Diberikan bilangan asli n dan bilangan-bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Buktikan bahwa

$$(1 + a_1)^2(1 + a_2)^3 \cdots (1 + a_n)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+1}a_1a_2 \ldots a_n$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar O. Garis BO dan CO memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut-turut di titik P dan Q. Selanjutnya, garis BQ dan CP berpotongan di titik R. Buktikan bahwa garis AR tegak lurus terhadap garis BC.

4. Diberikan 2012 titik berbeda $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$ di bidang Cartesius. Untuk sembarang permutasi $B_1, B_2, \ldots, B_{2012}$ dari $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$, didefinisikan bayangan dari titik P terhadap permutasi tersebut sebagai berikut.

   - Titik P dirotasikan 180° dengan pusat B_1 menghasilkan titik P_1
   - Titik P_1 dirotasikan 180° dengan pusat B_2 menghasilkan titik P_2

     $\vdots$
   - Titik P_{2011} dirotasikan 180° dengan pusat B_{2012} menghasilkan titik P_{2012}

   Selanjutnya, titik P_{2012} dikatakan sebagai bayangan dari titik P terhadap permutasi $B_1, B_2, \ldots, B_{2012}$. Misalkan N adalah banyak bayangan titik P yang berbeda terhadap semua permutasi dari $A_1, A_2, \ldots,$ A_{2012}. Tentukanlah nilai terbesar yang mungkin bagi N.

OSN Matematika SMA 2012
Hari Kedua

5. Diberikan bilangan asli m dan n. Misalkan P dan Q adalah dua kumpulan $m \times n$ bilangan 0 dan 1 yang disusun dalam m baris dan n kolom. Contoh salah satu kumpulan itu untuk $m = 3$ dan $n = 4$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Misalkan kedua kumpulan tersebut memenuhi empat sifat berikut.

   - Pada setiap baris di P, bilangan dari kiri ke kanan tidak pernah naik (boleh sama atau turun)
   - Pada setiap kolom di P, bilangan dari atas ke bawah tidak pernah naik (boleh sama atau turun)
   - Jumlah bilangan pada sebarang baris di P sama dengan jumlah bilangan pada baris yang sama di Q
   - Jumlah bilangan pada sebarang kolom di P sama dengan jumlah bilangan pada kolom yang sama di Q

   Buktikan bahwa bilangan pada baris ke-i kolom ke-j di P sama dengan bilangan pada baris ke-i kolom ke-j di Q untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

6. Buktikan bahwa tidak terdapat fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{2012}$$

   untuk setiap bilangan real positif x dan y.

7. Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa persamaan

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$$

   memiliki solusi pasangan bilangan asli (x, y) jika dan hanya jika n habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar daripada 1.

8. Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E. Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE. Lingkaran luar segitiga ABD memotong AN di titik Q. Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan sisi AC berturut-turut di titik P dan R. Buktikan bahwa empat titik B, P, Q, R terletak pada satu garis.