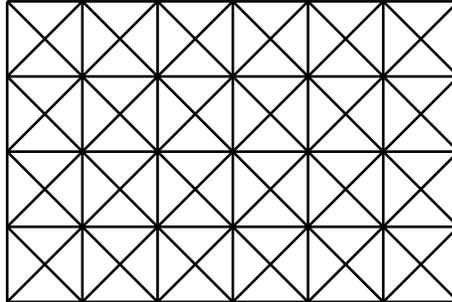


## OSN Matematika SMA 2013 Hari Pertama

1. Diberikan persegi panjang berukuran  $4 \times 6$  dengan beberapa ruas garis, seperti pada gambar di bawah



Dengan menggunakan ruas garis yang sudah ada, tentukan banyak jajargenjang tanpa sudut siku-siku pada gambar tersebut.

2. Diberikan segitiga lancip  $ABC$  dengan lingkaran luar  $\omega$ . Garis bagi  $\angle BAC$  memotong  $\omega$  di titik  $M$ . Misalkan  $P$  suatu titik pada garis  $AM$  dengan  $P$  di dalam segitiga  $ABC$ . Garis melalui  $P$  yang sejajar  $AB$  dan garis melalui  $P$  yang sejajar  $AC$  memotong sisi  $BC$  berturut-turut di titik  $E$  dan  $F$ . Garis  $ME$  dan  $MF$  memotong  $\omega$  lagi berturut-turut di titik  $K$  dan  $L$ . Buktikan bahwa garis-garis  $AM$ ,  $BL$ , dan  $CK$  konkuren.
3. Tentukan semua bilangan real positif  $M$  sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif  $a$ ,  $b$ , dan  $c$ , paling sedikit satu di antara tiga bilangan berikut

$$a + \frac{M}{ab}, b + \frac{M}{bc}, c + \frac{M}{ca}$$

bernilai lebih dari atau sama dengan  $1 + M$ .

4. Misalkan  $p > 3$  adalah bilangan prima dan

$$S = \sum_{2 \leq i < j < k \leq p-1} ijk$$

Buktikan bahwa bilangan  $S + 1$  habis dibagi  $p$ .

**OSN Matematika SMA 2013**  
**Hari Kedua**

5. Diberikan sebarang polinom kuadrat  $P(x)$  dengan koefisien utama positif dan diskriminan negatif. Buktikan bahwa  $P(x)$  dapat dinyatakan sebagai jumlah tiga polinom kuadrat

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$$

dengan  $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$  memiliki koefisien utama positif dan diskriminan nol serta akar (real kembar) dari ketiga polinom tersebut berbeda.

6. Suatu bilangan asli  $n$  dikatakan kuat apabila terdapat bilangan asli  $x$  sehingga  $n^{nx} + 1$  habis dibagi  $2^n$ .

(a) Buktikan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat.

(b) Jika  $m$  bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil  $y$  sehingga  $y^{my} + 1$  habis dibagi  $2^m$ .

7. Diberikan jajargenjang  $ABCD$ . Pada sisi luar jajargenjang, dikonstruksi persegi-persegi  $ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3, DAB_4C_4$ . Pada sisi-sisi luar  $B_4D_1, C_1A_2, D_2B_3$ , dan  $A_3C_4$  dari segitiga-segitiga  $AB_4D_1, BC_1A_2, CD_2B_3$ , dan  $DA_3C_4$ , konstruksi persegi-persegi lagi dengan pusat berturut-turut  $O_A, O_B, O_C$ , dan  $O_D$ . Buktikan bahwa

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$$

8. Misalkan  $A$  suatu himpunan berhingga beranggotakan bilangan asli. Tinjau himpunan-himpunan bagian dari  $A$  dengan tiga anggota. Himpunan  $A$  dikatakan seimbang apabila banyak himpunan bagian dari  $A$  dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 sama dengan banyak himpunan bagian dari  $A$  dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3.

(a) Berikan satu contoh himpunan seimbang dengan 9 anggota.

(b) Buktikan bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.