OSK Matematika SMA 2021
Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai $\boxed{2}$ poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misal $u_1, u_2, u_3, \ldots$ barisan aritmatika dengan suku-suku real positif. Jika $\frac{u_1+u_2}{u_3} = \frac{11}{21}$, maka nilai $\frac{u_2+u_3}{u_1}$ adalah ...

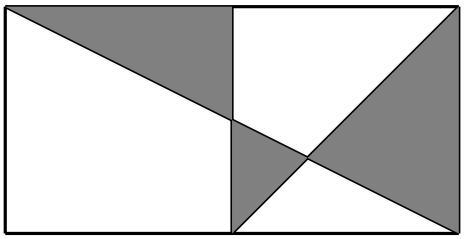
2. Koefisien x^7 pada penjumlahan $(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)$ adalah ...

3. Diketahui fungsi f terdefinisi untuk semua real x selain 0 dan 1, memenuhi
$$(x+1)f(-x) + \frac{1-x}{4x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{100(x^2+4)}{x}$$
Hitung nilai dari $f(2) + f(3) + \ldots + f(400)$.

4. Diketahui bilangan bulat positif A dan B jika dibagi 5 bersisa 2 dan 3. Sisa pembagian bilangan $A(A+1) + 5B$ oleh 25 adalah ...

5. Bilangan asli n dikatakan "menarik" jika terdapat suku banyak (polinomial) dengan koefisien bilangan bulat $P(x)$ sehingga $P(7) = 2021$ dan $P(n) = 2045$. Banyaknya bilangan prima yang menarik adalah ...

6. Pada gambar di bawah ini, sebuah persei panjang dibagi dua menjadi 2 buah persegi yang panjang sisinya 6. Luas total daerah yang diarsir adalah ...



7. Pada suatu lingkaran dengan jari-jari r, terdapat segiempat talibusur $ABCD$ dengan $AB = 8$ dan $CD = 5$. Sisi AB dan DC diperpanjang dan berpotongan di luar lingkaran di titik P. Jika $\angle APD = 60^\circ$ dan $BP = 6$, maka nilai dari r^2 adalah ...

8. Bilangan $1, 2, 3, \ldots, 999$ digit-digitnya disusun membentuk angka baru m dengan menuliskan semua digit bilangan-bilangan tadi dari kiri ke kanan. Jadi, $m = 1234\ldots91011\ldots999$. Hasil penjumlahan digit ke-2021, 2022, 2023 dari m adalah ...

9. Diketahui ada 6 pasang suami-istri. Dari keenam pasangan tersebut, dipilih 6 orang secara acak. Banyaknya cara untuk memilih 6 orang tersebut sehingga paling banyak terdapat sepasang suami-istri adalah ...

10. Diketahui segitiga ABC dengan $AB > AC$. Garis bagi sudut BAC memotong BC di titik D. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AC dan AB sehingga DE sejajar AB dan DF sejajar AC. Lingkaran luar $\triangle BCE$ memotong sisi AB di titik K. Jika luas segitiga CDE adalah 75 dan luas segitiga DEF adalah 85, maka luas segiempat $DEKF$ adalah ...

OSK Matematika SMA 2021
Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai $\boxed{+4}$ poin, dijawab salah bernilai $\boxed{-1}$ poin, dan tidak dijawab (kosong) bernilai $\boxed{0}$ poin.

1. Jika $a > 1$ suatu bilangan asli sehingga hasil penjumlahan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan
$$\lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0$$
adalah 51, maka a adalah ...

2. Diketahui bilangan real a, b dan c memenuhi pertidaksamaan
$$|ax^2 + bx + c| \leq 1$$
untuk setiap x anggota bilangan real dengan $0 \leq x \leq 1$. Nilai maksimum yang mungkin dari $23a + 22b + 21c$ adalah ...

3. Diberikan x, y dan n bilangan asli yang memenuhi
$$x^2 + (y+2)x + (n+1)y = n^2 + 252$$
Nilai y terbesar yang mungkin adalah ...

4. Jika dua digit terakhir dari a^{777} adalah 77, maka dua digit terakhir dari a adalah ...

5. Bilangan asli ganjil b terbesar sehingga barisan bilangan asli
$$a_n = n^2 + 19n + b$$
memenuhi $FPB(a_n, a_{n+1}) = FPB(a_{n+2}, a_{n+1})$ untuk setiap bilangan asli n adalah ...

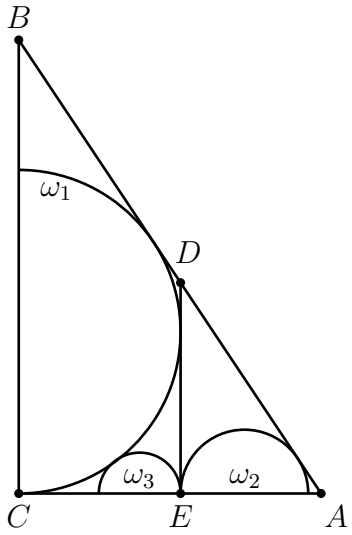
6. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 6, BC = 7$ dan $CA = 8$. Jika I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka AI^2 adalah ...

7. Banyak fungsi (pemetaan) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ dengan syarat 9 dan 10 mempunyai prapeta, yaitu ada x dan y di A sehingga $f(x) = 9$ dan $f(y) = 10$ adalah ...

8. Banyaknya barisan ternary (sukunya 0, 1 atau 2) yang memuat 15 suku, memuat tepat 5 (angka) 0 dan setiap di antara dua (angka) 0 ada paling sedikit dua suku bukan 0 adalah ...

9. Sebuah papan catur berukurang 109×21 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 3×1. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada 2 ubin yang bertumpuk atau bersentuhan? (Bersentuhan pada titik sudut ubin juga tidak diperbolehkan)

10. Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan $\angle BCA = 90^\circ$. Dibuat setengah lingkaran ω_1 dengan titik pusat di BC sedemikian sehingga ω_1 menyinggung AC dan AB. Titik D dan E berturut-turut terletak pada sisi AB dan AC sedemikian sehingga DE sejajar BC dan DE menyinggung ω_1. Dibuat setengah lingkaran ω_2 dengan titik pusat di AE sedemikian sehingga ω_2 menyinggung AD dan DE. Dibuat setengah lingkaran ω_3 dengan titik pusat di CE sedemikian sehingga ω_3 menyinggung DE dan ω_1, seperti pada gambar di bawah ini



Jika $2AC + 5BC = 5AB$, maka perbandingan panjang jari-jari ω_2 dan ω_3 adalah $k : 25$. Nilai dari k adalah ...