

OSN Matematika SMA 2023 Hari Pertama

1. Diberikan segitiga lancip ABC dengan sisi terpanjang BC . Titik D dan E berturut-turut terletak pada AC dan AB sedemikian hingga $BA = BD$ dan $CA = CE$. Titik A' adalah refleksi A terhadap BC . Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga ABC dan $A'DE$ memiliki panjang jari-jari yang sama.
2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian hingga persamaan berikut berlaku untuk setiap bilangan real x dan y

$$f(f(x) + y) = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor.$$

3. Suatu bilangan asli n ditulis pada papan. Neneng dan Asep secara bergantian mengganti angka pada papan tersebut mengikuti aturan berikut: Misalkan angka pada papan sekarang adalah X . Pada awalnya, Neneng akan memilih tanda naik atau turun. Kemudian, Asep akan memilih pembagi positif d dari X , lalu mengganti angka pada papan menjadi $X + d$, jika Neneng memilih "naik" atau $X - d$, jika Neneng memilih "turun". Proses ini dijalankan terus menerus. Asep menang apabila pada giliran tertentu, angka yang ia tulis pada papan tersebut adalah suatu bilangan kuadrat sempurna tidak nol, sedangkan Asep kalah apabila pada giliran tertentu ia menulis angka 0.

Buktikan bahwa jika $n \geq 14$, Asep dapat menang dalam kurang dari $\frac{n-5}{4}$ giliran.

4. Tentukan apakah terdapat bilangan asli N yang memenuhi kriteria berikut.
 - (a) N habis dibagi 2^{2023} , tapi tidak habis dibagi 2^{2024} ,
 - (b) N hanya memiliki tiga digit berbeda, yang semuanya tidak nol,
 - (c) Tepat 99.9% digit N adalah bilangan ganjil.

OSN Matematika SMA 2023
Hari Kedua

5. Misalkan a dan b adalah bilangan asli sedemikian hingga $\gcd(a, b) + \text{lcm}(a, b)$ adalah kelipatan $a + 1$. Jika $b \leq a$, buktikan bahwa b adalah bilangan kuadrat sempurna.
6. Tentukan banyaknya permutasi a_1, a_2, \dots, a_n dari $1, 2, \dots, n$ sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq n$, terdapat bilangan bulat r dengan $0 \leq r \leq n - k$ yang memenuhi

$$1 + 2 + \dots + k = a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_{r+k}.$$

7. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ACB = 90^\circ$. Misalkan ω adalah lingkaran luar segitiga ABC . Garis singgung ω di B dan C berpotongan pada titik P . Misalkan M adalah titik tengah PB . Garis CM memotong ω di N dan garis PN memotong AB di E . Titik D terletak pada CM sedemikian hingga DE sejajar BM . Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga CDE menyinggung ω .
8. Misalkan a, b, c adalah tiga bilangan bulat positif berbeda. Definisikan $S(a, b, c)$ sebagai himpunan semua akar rasional dari persamaan $px^2 + qx + r = 0$ untuk setiap permutasi (p, q, r) dari (a, b, c) . Sebagai contoh, $S(1, 2, 3) = \{-1, -2, -\frac{1}{2}\}$ karena persamaan $x^2 + 3x + 2$ memiliki akar -1 dan -2 , dan persamaan $2x^2 + 3x + 1 = 0$ memiliki akar -1 dan $-\frac{1}{2}$ dan untuk setiap permutasi $(1, 2, 3)$ lainnya, persamaan kuadrat yang terbentuk tidak punya akar rasional.
- Tentukan banyak anggota maksimal yang mungkin dari $S(a, b, c)$.