OSP Matematika SMA 2020
Soal Isian Singkat

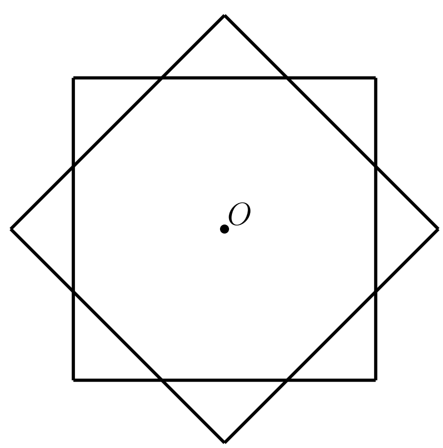
Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah empat.

1. Sejumlah siswa mengikuti ujian dengan komposisi soal sebagai berikut:
   - Bagian pertama terdiri dari 3 soal dengan dua pilihan (benar/salah)
   - Bagian kedua terdiri dari 5 soal ganda dengan lima pilihan (A,B,C,D,E).

   Banyaknya siswa minimal agar senantiasa terdapat dua siswa dengan jawaban sama persis baik pada bagian pertama maupun kedua adalah ...

2. Banyaknya bilangan asli $n < 800$ sehingga 8 membagi $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, namun 8 tidak membagi n adalah ...

3. Diberikan sebuah persegi dengan jari-jari lingkaran luar 6 satuan dengan pusat lingkaran luar O (artinya jarak titik O ke titik sudut persegi adalah 6 satuan). Persegi tersebut dirotasikan sebesar 45° searah jarum jam dengan titik O sebagai titik pusat rotasi. Kedua persegi, sebelum dan sesudah rotasi, digabung menjadi satu bangun datar baru (perhatikan gambar di bawah) dengan keliling K dan luas L. Nilai dari $\left(\frac{L}{K}\right)^2$ adalah ...



4. Misalkan x, y bilangan bulat positif dan

$$A = \sqrt{\log x}, B = \sqrt{\log y}$$
$$C = \log \sqrt{x}, D = \log \sqrt{y}.$$

   Jika diketahui bahwa A, B, C, D semuanya bulat dan

$$A + B + C + D = 24,$$

   maka $xy = 10^n$ dengan $n = \ldots$

5. Suatu barisan bilangan bulat $u_1, u_2, u_3, \ldots$ memenuhi

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 2, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

   Jika $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = 360$, maka $u_1 = \ldots$

6. Diketahui himpunan $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya pasangan himpunan bagian tidak kosong $A_1, \ldots, A_6$ yang memenuhi tiga syarat berikut sekaligus:

   - $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
   - $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$
   - $A_3 \subseteq A_4 \subseteq A_5 \subseteq A_6$

   adalah ...

7. Pada segiempat konveks $ABCD$ berlaku $\angle BAD = \angle BCD = 45°$, $BC = AD = 5$, dan BC tidak sejajar AD. Keliling segiempat tersebut dapat dituliskan sebagai $p + q\sqrt{r}$ dengan p, q, r bulat dan r bebas kuadrat (tidak memiliki faktor bilangan kuadrat selain 1). Nilai dari $p + q + r$ adalah ...

8. Jika n adalah bilangan asli sehingga $4n + 808$ dan $9n + 1621$ merupakan bilangan kuadrat, maka $n = \ldots$

9. Diketahui segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC di titik D. Lingkaran dengan pusat C dan melalui D memotong AD di E ($D \neq E$), dan lingkaran dengan pusat A dan melalui E memotong AB di X ($X \neq A$). Diketahui bahwa E terletak di dalam segitiga ABC. Jika $AB = 15, AD = 9$ dan $AC = 6$, maka $BX = \ldots$

10. Misalkan H menyatakan himpunan semua bilangan asli yang dapat dituliskan sebagai

$$\frac{10n^2 + 25}{n + 2}$$

    untuk suatu bilangan asli n. Jumlah semua anggota H adalah ...

11. Diberikan sebuah prisma dengan alas dan tutup berupa segi-n beraturan. Semua titik sudut prisma ($2n$ titik sudut) dilabeli dengan bilangan 1 atau -1. Diketahui bahwa untuk setiap sisi (muka) prisma, hasil kali semua label titik sudut pada sisi (muka) tersebut adalah -1. Hasil penjumlahan semua n dengan $23 \leq n \leq 54$ agar pelabelan seperti di atas mungkin dilakukan adalah ...

12. Suatu polinom $P(x)$ memenuhi

$$P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^3 + 1}{x} + \frac{x^3 + 8}{2x^2} + 3.$$

    Nilai dari $P(1)$ adalah ...

13. Pada suatu segitiga tumpul, diketahui bahwa panjang garis tinggi terpanjang adalah 8 dan panjang salah satu garis tinggi lainnya adalah 3. Jika diketahui bahwa garis tinggi ketiga, memiliki panjang bilangan prima, panjang garis tinggi tersebut adalah ...

14. Misalkan x dan y bilangan-bilangan real positif sehingga

$$\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)=139.$$

Jika nilai maksimal dan minimal dari

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

berturut-turut adalah M dan m, maka nilai dari $M-m$ adalah ...

15. Diberikan suatu kubus yang terletak di atas tanah dengan 5 sisi (muka) berwarna putih dan satu sisi (muka) berwarna hitam. Pada awalnya, sisi berwarna hitam bukan merupakan sisi tegak. Kemudian kubus tersebut diputar pada salah satu rusuk pada alasnya sehingga alasnya berganti, dan diulangi sampai 8 kali. Peluang bahwa sisi berwarna hitam bukan sisi tegak lagi adalah ...

16. Misalkan m suatu bilangan asli. Suatu bilangan asli $n>1$ dikatakan rep-m jika terdapat bilangan asli x, y, z sehingga $x+y+z=m$ dan

$$\frac{x}{n-1}=\frac{y}{n}=\frac{z}{n+1}.$$

Diketahui bahwa terdapat tepat 32 bilangan rep-m dengan salah satu di antaranya adalah 10. Bilangan asli k terbesar sehingga 10^k membagi m adalah ...

OSP Matematika SMA 2020
Soal Uraian Bagian Pertama

Soal uraian bagian pertama ini terdiri dari 3 soal, soal nomor 1 sampai dengan nomor 3. Anda tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

1. Diberikan lima persegi kecil dan sebuah persegi panjang besar $ABCD$ seperti pada gambar berikut ini.

   Dalam gambar tersebut, titik P, Q, R, S terletak pada sisi persegi panjang $ABCD$. Jika diketahui bahwa luas persegi kecil adalah 1 satuan, tentukan luas persegi panjang $ABCD$.

2. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + px + q$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan bulat berbeda sehingga 2^{2020} habis membagi $f(a), f(b)$, dan $f(c)$, tetapi 2^{1000} tidak habis membagi $b - a$ dan juga tidak habis membagi $c - a$. Tunjukkan bahwa 2^{1021} habis membagi $b - c$.

3. Tentukan semua bilangan irasional x sehingga $x^2 + 20x + 20$ dan $x^3 - 2020x + 1$ keduanya merupakan bilangan rasional.

OSP Matematika SMA 2020
Soal Uraian Bagian Kedua

Soal uraian bagian pertama ini terdiri dari 2 soal, soal nomor 4 dan nomor 5. Anda tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

4. Diketahui segitiga ABC tidak sama kaki dengan garis tinggi AA_1, BB_1, dan CC_1. Misalkan B_A dan C_A berturut-turut titik pada BB_1 dan CC_1 sehingga A_1B_A tegak lurus BB_1 dan A_1C_A tegak lurus CC_1. Garis B_AC_A dan BC berpotongan di titik T_A. Definisikan dengan cara yang sama titik T_B dan T_C. Buktikan bahwa T_A, T_B, dan T_C kolinear.

5. Di suatu kota, n anak mengikuti kompetisi matematika dengan nilai total berupa bilangan bulat non-negatif. Misalkan $k < n$ bilangan bulat positif. Untuk setiap anak s, ia mendapatkan:

   (a) k buah permen untuk setiap poin nilai yang diperolehnya, dan

   (b) untuk setiap anak lain t yang nilainya lebih tinggi dari s, maka s mendapatkan 1 buah permen untuk setiap poin selisih nilai t dan s.

   Setelah semua permen dibagikan, ternyata tidak ada anak yang memperoleh permen lebih sedikit dari Badu, dan ada i anak yang memperoleh nilai lebih tinggi dari Badu. Tentukan semua nilai i yang mungkin.