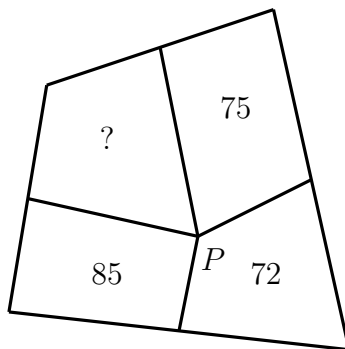


OSP Matematika SMA 2021 Soal Bagian Pertama

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah empat.

1. Tentukan banyak cara membagikan delapan buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan setiap anak menerima paling sedikit dua buku.
2. Titik P terletak di dalam suatu segiempat dan dihubungkan dengan titik tengah setiap sisi segiempat tersebut, seperti di gambar. Dari konstruksi ini, segiempat tersebut terbagi menjadi empat buah daerah. Luas tiga dari empat daerah tersebut telah ditulis di dalam masing-masing daerah. Tentukanlah luas dari daerah yang belum diketahui (ditandai dengan tanda tanya).



3. Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif, dan definisikan $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tentukan banyak tripel (a, b, c) sehingga $a, b, c \leq 10$ dan $P(x)$ habis dibagi 6 untuk semua x bilangan bulat positif.
4. Tentukanlah semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}(x^2 + y + 1)(y^2 + x + 1) &= 4 \\ (x^2 + y)^2 + (y^2 + x)^2 &= 2.\end{aligned}$$

5. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ABC = 120^\circ$. Titik-titik A_1, B_1 , dan C_1 berturut-turut terletak pada segmen BC, CA , dan AB , sehingga garis AA_1, BB_1 , dan CC_1 merupakan garis-garis bagi dari sudut-sudut segitiga ABC . Tentukanlah besar $\angle A_1B_1C_1$.

OSP Matematika SMA 2021

Soal Bagian Kedua

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh.

1. Suta menuliskan 2021 bilangan asli pertama di papan tulis, sehingga setiap bilangan ditulis tepat sekali. Ia kemudian melingkari beberapa bilangan di antaranya, kemudian menjumlahkan seluruh bilangan yang ia lingkari dan mendapatkan nilai K . Kemudian, Suta juga menjumlahkan seluruh bilangan yang tidak ia lingkari dan mendapatkan nilai L . Tunjukkan Suta dapat memilih bilangan yang ia lingkari di awal, sehingga $K - L = 2021$.
2. Tentukanlah semua bilangan asli $n > 3$ sehingga $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ habis membagi $n + 1$ dan $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ habis membagi $n - 1$.

Catatan: $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x .

3. Diberikan segitiga ABC dengan titik berat G . Titik D merupakan titik tengah AC . Garis yang melalui G dan sejajar dengan BC memotong AB di E . Buktikan bahwa $\angle AEC = \angle DGC$ jika dan hanya jika $\angle ACB = 90^\circ$.
4. Misal X himpunan yang berisikan bilangan rasional positif yang memenuhi dua persyaratan berikut:
 - (a) Jika x rasional dan $2021 \leq x \leq 2022$, maka $x \in X$.
 - (b) Jika $x, y \in X$, maka $\frac{x}{y}$ juga di X .

Buktikan seluruh bilangan rasional positif termuat di X .

5. Lima buah petak dari papan catur berukuran 9×9 dibuang seperti terlihat pada gambar. Seluruh papan catur tersebut akan ditutupi oleh kartu-kartu domino sehingga setiap domino menutupi dua petak papan, dan setiap petak tertutup oleh tepat satu domino. Dapatkah hal tersebut dilakukan sehingga setiap garis vertikal dan horizontal bagian dalam (yang bukan garis merah) sedikitnya memotong dua kartu domino?

