

OSP Matematika SMA 2022

Isian Singkat

Terdiri dari 10 soal isian singkat dengan jawaban berupa bilangan bulat. Setiap soal yang dijawab benar bernilai $\boxed{2}$ poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misalkan a, b, c adalah bilangan asli sedemikian sehingga $a + 2b + 3c = 59$. Nilai minimum dari $a^2 + b^2 + c^2$ adalah ...
2. Diketahui $ABCD$ adalah trapesium sedemikian sehingga $AB \parallel CD$, dengan panjang $AB = 7$ dan $CD = 8$. Misalkan titik P dan Q berturut-turut pada AD dan BC sedemikian sehingga $PQ \parallel AB$. Jika keliling trapesium $ABQP$ sama dengan keliling trapesium $PQCD$ serta $AD + BC = 10$, panjang dari $20PQ$ adalah.....
3. Diberikan segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi 19 satuan. Dengan mempartisi masing-masing sisi segitiga tersebut menjadi 19 segmen garis sama panjang dan menarik garis-garis yang sejajar dengan masing-masing ketiga sisinya akan diperoleh 19^2 segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 satuan. Banyaknya jajargenjang yang terbentuk dari proses tersebut adalah $19k$. Nilai $k = \dots$
4. Misalkan a, b bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$\sqrt{a + \frac{15}{b}} = a\sqrt{\frac{15}{b}}$$

Hasil penjumlahan semua nilai yang mungkin yang b adalah ...

5. Tinjau barisan semua bilangan tujuh angka (digit) yang masing-masing menggunakan semua angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7, diurutkan mulai dari yang terkecil sampai yang terbesar. Suku ke-2024 dari barisan tersebut adalah ...
6. Diberikan suku banyak $P(x)$ dengan koefisien bilangan bulat yang memenuhi $P(6)P(38)P(57) + 19$ habis dibagi 114. Jika $P(-13) = 479$ dan $P(0) \geq 0$, nilai terkecil yang mungkin dari $P(0)$ adalah ...
7. Banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $m^n = 17^{432}$ adalah ...
8. Misalkan ABC adalah segitiga dengan panjang sisi $AB = 16, AC = 23$ dan $\angle BAC = 30^\circ$. Luas persegi panjang terbesar sehingga salah satu sisinya berhimpit dengan BC , dan dua titik sudut lainnya masing-masing pada AB dan AC adalah ...
9. Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari $S = \{1, 2, 3, \dots, 21\}$ yang hasil penjumlahan anggotanya habis dibagi 4 adalah $2k - m$, dengan k, m bilangan bulat dan $0 \leq m \leq 2022$. Nilai dari $10k + m$ adalah ...
10. Diberikan barisan (a_n) dengan $a_1 > 3$ dan untuk semua bilangan asli $n \geq 1$ berlaku

$$2a_{n+1} = a_n(-1 + \sqrt{4a_n - 3}).$$

Jika $|a_1 - a_{2023}| = 2023$, nilai dari $\sum_{i=1}^{2021} \frac{a_i^3}{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2}$ adalah ...

OSP Matematika SMA 2022

Uraian

Terdiri dari 5 soal uraian dengan poin 0-7.

1. Misalkan A dan B himpunan dengan sifat bahwa terdapat tepat 144 himpunan yang merupakan himpunan bagian dari A atau B . Tentukan banyaknya anggota $A \cup B$.
2. (a) Tentukan suatu bilangan asli n sehingga $n(n+2022)+2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.
(b) Tentukan semua bilangan asli a sehingga untuk setiap bilangan asli n , bilangan $n(n+a)+2$ tidak pernah merupakan suatu kuadrat sempurna.
3. Diketahui bahwa x dan y adalah bilangan real yang memenuhi

$$5x^2 + 4xy + 11y^2 = 3$$

Tanpa menggunakan kalkulus (turunan/integral), tentukan nilai maksimum dari $xy - 2x + 5y$

4. Diberikan segitiga ABC dengan titik pusat lingkaran luar O . Titik D merupakan refleksi titik A terhadap BC . Misalkan ℓ adalah garis yang sejajar dengan BC dan melalui O . Garis melalui B sejajar CD dan ℓ bertemu pada titik B_1 . CB_1 dan BD berpotongan pada titik B_2 . Garis melalui C sejajar BD dan ℓ bertemu pada titik C_1 . BC_1 dan CD berpotongan pada titik C_2 . Buktikan bahwa A, B_2, C_2, D terletak pada suatu lingkaran.
5. Pada papan tulis mula-mula terdapat 22 angka $1, 2, 3, \dots, 21, 22$. Suatu langkah adalah prosedur memilih dua angka a, b pada papan dengan $b \geq a + 2$, kemudian menghapus a dan b dan menggantikannya dengan $a + 1$ dan $b - 1$. Tentukan banyaknya langkah maksimum yang mungkin dapat dilakukan.