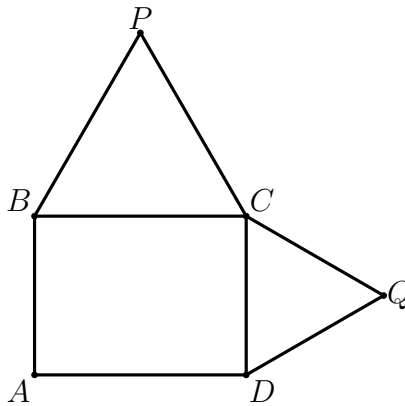


## OSP Matematika SMA 2023

### Isian Singkat

Terdiri dari 8 soal isian singkat dengan jawaban berupa bilangan bulat. Setiap soal yang dijawab benar bernilai  $\boxed{2}$  poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong). Waktu pengerjaan bagian ini adalah 60 menit.

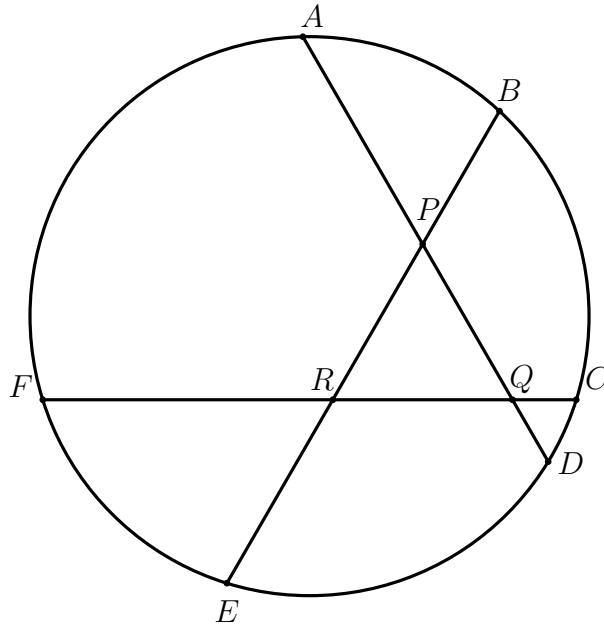
1. Diberikan dua barisan aritmatika tak konstan  $a_1, a_2, \dots$  dan  $b_1, b_2, \dots$ . Jika  $a_{228} = b_{15}$  dan  $a_8 = b_5$ . Tentukan nilai dari  $\frac{b_4 - b_3}{a_2 - a_1}$ .
2. Tentukan banyaknya asli  $n \leq 221$  sehingga  $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n}$  merupakan bilangan bulat.
3. Tentukan banyaknya garis berbeda pada koordinat Kartesius yang dapat diambil dari pasangan  $(a, b) \in \{0, 1, 2, 3, 6, 7\}$  sehingga memenuhi  $ax + by = 0$ .
4. Diberikan persegi panjang  $ABCD$  dan segitiga sama sisi  $BCP$  dan  $CDQ$  seperti gambar di bawah ini.



Jika panjang  $AB = 8$ ,  $AC = 10$  dan luas segitiga  $ACP$  ditambah luas segitiga  $ACQ$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $m\sqrt{3} + n$ , tentukan nilai  $m + n$ .

5. Diberikan himpunan  $S = \{1, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 20, 27, 45\}$ . Tentukan banyaknya himpunan bagian 3 anggota sehingga hasil kali ketiga bilangan tersebut habis dibagi 18.

6. Perhatikan gambar berikut.



Jika diketahui panjang  $AP = 21$ ,  $CQ = 13$  dan  $ER = 36$ , serta segitiga  $PQR$  sama sisi, tentukan nilai  $BP + DQ + FR$ .

7. Tentukan banyaknya bilangan asli  $n$  sehingga

$$\sqrt{2n - 16} + \sqrt{2n + 36}$$

adalah bilangan asli.

8. Diberikan bilangan real  $a, b$  sehingga memenuhi kedua persamaan berikut.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{\frac{2}{5}} \text{ dan } (a - b)^2 = \frac{4}{15}(ab)^3.$$

Tentukan nilai maksimum dari  $a^2 + b^2$ .

## OSP Matematika SMA 2023

### Uraian

Terdiri dari 5 soal uraian dengan poin 0-7. Waktu pengerjaan bagian ini adalah 150 menit.

1. Misalkan  $ABCD$  adalah suatu persegi dengan panjang sisi 43 cm dan titik-titik  $X$  dan  $Y$  berturut-turut terletak pada sisi  $AD$  dan  $BC$  sehingga perbandingan luas  $ABXY$  dengan luas  $CDXY$  adalah  $20 : 23$ . Tentukan panjang maksimum  $XY$  yang mungkin.

2. Misalkan  $K$  suatu bilangan asli sehingga terdapat tripel bilangan  $(x, y, z)$  dengan

$$x^3 + Ky, y^3 + Kz, z^3 + Kx$$

semuanya merupakan bilangan kubik sempurna.

- (a) Buktikan bahwa  $K \neq 2$  dan  $K \neq 4$ .
  - (b) Tentukan bilangan asli  $K$  terkecil yang memenuhi syarat di atas, jelaskan jawaban anda.
3. Tentukan bilangan bulat terbesar  $B$  sehingga untuk setiap 9 bilangan asli berbeda yang hasil penjumlahannya 2023, pasti terdapat 4 diantaranya yang hasil penjumlahannya minimal  $B$ .
  4. Tentukan semua bilangan real tak rasional  $\alpha$  yang memenuhi

$$\alpha^3 - 15\alpha \text{ dan } \alpha^4 - 56\alpha$$

keduanya merupakan bilangan rasional.

5. Diberikan segitiga  $ABC$  dan titik  $D$  dan  $E$  terletak pada sisi  $BC$ . Titik  $X$  dan  $Y$  terletak di dalam segitiga  $ABC$  sehingga berlaku

$$\angle BXE + \angle BCA = \angle CYD + \angle CBA = 180^\circ$$

Misalkan garis  $AD$  memotong garis  $XE$  di titik  $P$  dan garis  $YD$  di titik  $Q$ . Jika diketahui bahwa  $X, Y, D, E$  terletak pada satu lingkaran, buktikan bahwa garis  $BP$ , garis  $CQ$  dan garis sumbu sisi  $BC$  berpotongan pada satu titik.